2026 级留学生预科数学 B 班第四次测验参考答案

Answer Key for the Fourth Quiz

Preparatory Mathematics Class B

1. 指数的计算（10 分）/ Exponential Calculations (10 points)

(1) 利用同底数幂的乘法法则：

$$5^3 \times 5^{-2} = 5^{3-2} = \boxed{5}.$$

(2) 利用幂的乘方和同底数幂的除法法则：

$$(3^4)^2 \div 3^5 = 3^8 \div 3^5 = 3^3 = \boxed{27}.$$

(3) 利用负整数指数幂的性质：

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} \times 3^{-1} = 9 \times \frac{1}{3} = \boxed{3}.$$

(4) 将分子、分母分别写成四次幂：

$$\begin{aligned}\left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{3}{4}} &= \left(\frac{2^4}{3^4}\right)^{-\frac{3}{4}} \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^{3} = \boxed{\frac{27}{8}}.\end{aligned}$$

(5) 对任意非零实数 a，都有 $a^0 = 1$。因此

$$1^0 + 2^0 + \cdots + 99^0 + 100^0 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{100\text{个}} = \boxed{100}.$$

2. 对数的计算（20 分）/ Logarithmic Calculations (20 points)

(1) 因为 $4^3 = 64$，所以

$$\log_4 64 = \boxed{3}.$$

(2) 因为 $3^{-3} = \dfrac{1}{27}$，所以

$$\log_3 \frac{1}{27} = \boxed{-3}.$$

(3) 由于 $\dfrac{1}{4} = 4^{-1}$，利用换底公式：

$$\log_{\frac{1}{4}} 27 = \frac{\ln 27}{\ln \frac{1}{4}} = -\frac{\ln 27}{\ln 4} = -\log_4 27.$$

因此

$$\log_4 27 + \log_{\frac{1}{4}} 27 = \boxed{0}.$$

(4) 利用对数的减法公式：

$$\log_2 48 - \log_2 3 = \log_2 \frac{48}{3} = \log_2 16 = \boxed{4}.$$

(5) 利用指数与对数的互逆关系：

$$e^{\ln 7} + \log_5 5^3 = 7 + 3 = \boxed{10}.$$

(6) 利用对数的加法公式：

$$\lg 8 + \lg 125 = \lg(8 \times 125) = \lg 1000 = \boxed{3}.$$

(7) 利用对数的运算法则：

$$\begin{aligned}\log_3 18 + \log_3 6 - \log_3 4 &= \log_3 \frac{18 \times 6}{4} \\ &= \log_3 27 \\ &= \boxed{3}.\end{aligned}$$

(8) 利用换底公式：

$$\frac{\ln 125}{\ln 5} = \log_5 125 = \boxed{3}.$$

(9) 利用换底公式：

$$\begin{aligned}\log_2 7 \times \log_7 16 &= \frac{\ln 7}{\ln 2} \times \frac{\ln 16}{\ln 7} \\ &= \frac{\ln 16}{\ln 2} \\ &= \log_2 16 = \boxed{4}.\end{aligned}$$

(10) 利用换底公式，并注意 $27 = 3^3$，$0.5 = \frac{1}{2}$，$4 = 2^2$：

$$\begin{aligned}\frac{\log_{27} 0.5}{\log_3 4} &= \frac{\dfrac{\ln(1/2)}{\ln 27}}{\dfrac{\ln 4}{\ln 3}} \\ &= \frac{-\ln 2}{3\ln 3} \times \frac{\ln 3}{2\ln 2} \\ &= \boxed{-\frac{1}{6}}.\end{aligned}$$

3. 换元法解方程（10 分）/ Solving Equations by Substitution (10 points)

(1) 原方程为

$$2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0.$$

令 $t = 2^x > 0$，则

$$t^2 - 5t + 4 = 0,$$

即

$$(t-1)(t-4) = 0.$$

所以 $t = 1$ 或 $t = 4$。

因此

$$2^x = 1 \quad \text{或} \quad 2^x = 4,$$

解得

$$\boxed{x = 0 \quad \text{或} \quad x = 2}.$$

(2) 原方程为

$$\log_2(-2x^2 + 3) = 0.$$

由对数的定义可知

$$-2x^2 + 3 = 2^0 = 1.$$

因此

$$x^2 = 1.$$

两个解均满足对数真数大于零的条件，所以

$$\boxed{x = -1 \quad \text{或} \quad x = 1}.$$

(3) 原方程为

$$\frac{2^x + 4}{2^x + 2} = \frac{2^x}{2^x - 1}.$$

令 $t = 2^x > 0$，注意 $t \neq 1$，则

$$\frac{t+4}{t+2} = \frac{t}{t-1}.$$

交叉相乘得

$$(t+4)(t-1) = t(t+2).$$

展开：

$$t^2 + 3t - 4 = t^2 + 2t.$$

所以

$$t = 4.$$

即 $2^x = 4$，解得

$$\boxed{x = 2}.$$

(4) 原方程为

$$\sqrt{\ln x + 1} = \ln x - 1.$$

令 $t = \ln x$，则

$$\sqrt{t+1} = t - 1.$$

因为左边非负，所以必须有 $t \geq 1$。

两边平方得

$$t + 1 = (t-1)^2,$$

即

$$t^2 - 3t = 0.$$

因此

$$t = 0 \quad \text{或} \quad t = 3.$$

其中 $t = 0$ 不满足 $t \geq 1$，舍去。

所以

$$\ln x = 3,$$

解得

$$\boxed{x = e^3}.$$

(5) 原方程为

$$\log_2 \left(\frac{x+3}{x-1} \right) = 2.$$

根据对数的定义：

$$\frac{x+3}{x-1} = 4.$$

因此

$$x + 3 = 4x - 4,$$

解得

$$x = \frac{7}{3}.$$

代入原方程可知满足定义域条件，所以

$$\boxed{x = \frac{7}{3}}.$$

4. 求函数的定义域（10 分）/ Finding Domains of Functions (10 points)

(1) 已知

$$y = \log_3(2x - 4).$$

对数的真数必须大于零：

$$2x - 4 > 0.$$

因此 $x > 2$，定义域为

$$\boxed{(2, +\infty)}.$$

(2) 已知

$$y=\sqrt{\lg(3-x)}.$$

平方根内的表达式必须非负：

$$\lg(3-x)\geq 0.$$

因为常用对数函数严格递增，且 $\lg 1=0$，所以

$$3-x\geq 1.$$

即 $x\leq 2$。定义域为

$$\boxed{(-\infty,2]}.$$

(3) 已知

$$y=\frac{1}{x-2}+\ln(x+1).$$

必须同时满足

$$x-2\neq 0,\qquad x+1>0.$$

即

$$x\neq 2,\qquad x>-1.$$

因此定义域为

$$\boxed{(-1,2)\cup(2,+\infty)}.$$

(4) 已知

$$y=\sqrt[3]{\log_2(x+1)}.$$

立方根对所有实数都有定义，只需保证对数的真数大于零：

$$x+1>0.$$

因此定义域为

$$\boxed{(-1,+\infty)}.$$

(5) 已知

$$y=\frac{\sqrt{x+2}}{\ln(x-1)}.$$

必须满足

$$x+2\geq 0,\qquad x-1>0,\qquad \ln(x-1)\neq 0.$$

其中

$$\ln(x-1)=0\quad\Longleftrightarrow\quad x=2.$$

综合得到

$$x>1,\qquad x\neq 2.$$

因此定义域为

$$\boxed{(1,2)\cup(2,+\infty)}.$$

5. 指数与对数不等式（15 分）/ Exponential and Logarithmic Inequalities (15 points)

(1) 原不等式为

$$3^{x-1} > 9^x.$$

因为 $9^x = 3^{2x}$，所以

$$3^{x-1} > 3^{2x}.$$

由于指数函数 $y = 3^x$ 严格递增，因此

$$x - 1 > 2x.$$

解得 $x < -1$，解集为

$$\boxed{(-\infty, -1)}.$$

(2) 原不等式为

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4} \leq 1.$$

因为

$$1 = \left(\frac{1}{3}\right)^0,$$

且指数函数 $y = (1/3)^x$ 严格递减，所以

$$x^2 - 4 \geq 0.$$

即

$$(x-2)(x+2) \geq 0.$$

因此解集为

$$\boxed{(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)}.$$

(3) 原不等式为

$$\log_5(3x+1) < 2.$$

首先要求

$$3x + 1 > 0.$$

因为底数 $5 > 1$，所以

$$3x + 1 < 5^2 = 25.$$

综合得到

$$0 < 3x + 1 < 25.$$

即

$$-\frac{1}{3} < x < 8.$$

因此解集为

$$\boxed{\left(-\frac{1}{3}, 8\right)}.$$

(4) 原不等式为

$$\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}}(x+1) \geq -1.$$

首先要求 $x > 0$。

利用对数的加法公式：

$$\log_{\frac{1}{2}}[x(x+1)] \geq -1.$$

因为底数 $\frac{1}{2} < 1$，对数函数严格递减，所以

$$x(x+1) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2.$$

即

$$x^2 + x - 2 \leq 0.$$

因式分解得

$$(x+2)(x-1) \leq 0.$$

所以

$$-2 \leq x \leq 1.$$

再结合定义域 $x > 0$，解集为

$$\boxed{(0,1]}.$$

(5) 原不等式为

$$\log_2(x^2 - 4x + 3) < 3.$$

因为底数 $2 > 1$，所以原不等式等价于

$$0 < x^2 - 4x + 3 < 8.$$

首先，

$$x^2 - 4x + 3 > 0$$

等价于

$$(x-1)(x-3) > 0,$$

因此

$$x < 1 \quad \text{或} \quad x > 3.$$

另一方面，

$$x^2 - 4x + 3 < 8$$

等价于

$$x^2 - 4x - 5 < 0,$$

即

$$(x+1)(x-5) < 0.$$

所以

$$-1 < x < 5.$$

取两个条件的交集，得到解集

$$\boxed{(-1,1) \cup (3,5)}.$$

6. 比较大小（15 分）/ Comparing Numbers (15 points)

(1) 已知

$$a = 2^{1.9}, \quad b = 2^{0.8}, \quad c = 5^{-1.5}.$$

因为 $2 > 1$，指数函数严格递增，且

$$0.8 < 1.9,$$

所以 $b < a$。

又因为

$$c = 5^{-1.5} < 1, \qquad b = 2^{0.8} > 1,$$

所以 $c < b$。

因此

$$\boxed{c < b < a}.$$

(2) 已知

$$a = 2^{1.4}, \quad b = 4^{0.6}, \quad c = 8^{0.5}.$$

将三个数化为以 2 为底的指数：

$$a = 2^{1.4},$$
$$b = (2^2)^{0.6} = 2^{1.2},$$
$$c = (2^3)^{0.5} = 2^{1.5}.$$

因为

$$1.2 < 1.4 < 1.5,$$

所以

$$\boxed{b < a < c}.$$

(3) 已知

$$a = \log_{0.2} 3, \quad b = \log_{0.2} 8, \quad c = \log_{0.2} 0.3.$$

因为 $0 < 0.2 < 1$，对数函数 $y = \log_{0.2} x$ 严格递减。

又因为

$$0.3 < 3 < 8,$$

所以

$$\log_{0.2} 0.3 > \log_{0.2} 3 > \log_{0.2} 8.$$

因此

$$\boxed{b < a < c}.$$

(4) 已知

$$a = \log_{1.8} 2, \quad b = \log_{1.3} 0.2, \quad c = \log_3 2.$$

因为 $1.3 > 1$，且 $0 < 0.2 < 1$，所以

$$b = \log_{1.3} 0.2 < 0.$$

另一方面，由于 $1.8>1$ 和 $3>1$，且 $2>1$，所以

$$a>0, \qquad c>0.$$

再利用换底公式：

$$a=\frac{\ln 2}{\ln 1.8}, \qquad c=\frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

因为

$$0<\ln 1.8<\ln 3,$$

所以

$$a>c.$$

因此

$$\boxed{b<c<a}.$$

(5) 已知

$$a=e^{0.1}, \quad b=\log_6 3, \quad c=2-\log_3 10.$$

因为 $0.1>0$，所以

$$a=e^{0.1}>e^0=1.$$

因为 $1<3<6$，且底数 $6>1$，所以

$$0<b=\log_6 3<1.$$

又因为 $10>9=3^2$，所以

$$\log_3 10>2,$$

因此

$$c=2-\log_3 10<0.$$

综上，

$$c<0<b<1<a,$$

所以

$$\boxed{c<b<a}.$$

7. 指数函数的性质（10 分）/ Properties of an Exponential Function (10 points)

已知函数

$$y=2^x.$$

(1) 指数函数 $y=2^x$ 对任意实数 x 都有定义，因此定义域为

$$\boxed{(-\infty,+\infty)}.$$

(2) 对任意实数 x，都有 $2^x>0$。当 $x\to-\infty$ 时，$2^x\to 0$；当 $x\to+\infty$ 时，$2^x\to+\infty$。因此值域为

$$\boxed{(0,+\infty)}.$$

(3) 因为底数 $2>1$，所以函数 $y=2^x$ 在整个定义域上

$$\boxed{\text{严格递增}}.$$

(4) 令 $x=0$，得

$$y=2^0=1.$$

因此图像与 y 轴的交点为

$$\boxed{(0,1)}.$$

(5) 求 $y=2^x$ 与 $y=4-x^2$ 的交点个数。

令

$$2^x=4-x^2,$$

即

$$F(x)=2^x+x^2-4=0.$$

首先，

$$F(-2)=\frac{1}{4}>0, \qquad F(0)=1-4=-3<0.$$

因此在 $(-2,0)$ 内至少有一个交点。

又因为

$$F(0)=-3<0, \qquad F(2)=4>0,$$

所以在 $(0,2)$ 内至少有一个交点。

下面说明交点不可能超过两个。

函数

$$F(x)=2^x+x^2-4$$

的二阶导数为

$$F''(x)=(\ln 2)^2\,2^x+2>0.$$

因此 F 是严格凸函数，其图像与 x 轴至多有两个交点。

综上，两个函数图像的交点个数为

$$\boxed{2}.$$

8. 对数函数的性质（10 分）/ Properties of a Logarithmic Function (10 points)

已知函数

$$y = \log_2 x.$$

(1) 对数的真数必须大于零，即 $x > 0$。因此定义域为

$$\boxed{(0, +\infty)}.$$

(2) 当 x 在 $(0, +\infty)$ 内变化时，$\log_2 x$ 可以取任意实数值。因此值域为

$$\boxed{(-\infty, +\infty)}.$$

(3) 因为底数 $2 > 1$，所以函数 $y = \log_2 x$ 在其定义域上

$$\boxed{\text{严格递增}}.$$

(4) 令 $y = 0$，得

$$\log_2 x = 0.$$

所以

$$x = 2^0 = 1.$$

因此图像与 x 轴的交点为

$$\boxed{(1, 0)}.$$

(5) 求 $y = \log_2 x$ 与 $y = x - 5$ 的交点个数。

令

$$\log_2 x = x - 5,$$

即

$$F(x) = \log_2 x - x + 5 = 0, \qquad x > 0.$$

首先，

$$F(1) = 0 - 1 + 5 = 4 > 0.$$

而当 $x \to 0^+$ 时，

$$F(x) \to -\infty.$$

因此在 $(0, 1)$ 内至少有一个交点。

另一方面，

$$F(8) = 3 - 8 + 5 = 0.$$

所以 $x = 8$ 也是一个交点。

下面说明交点不可能超过两个。

因为

$$F''(x) = -\frac{1}{x^2 \ln 2} < 0, \qquad x > 0,$$

所以 F 是严格凹函数，其图像与 x 轴至多有两个交点。

因此两个函数图像的交点个数为

$$\boxed{2}.$$

9. 附加题：反函数的概念和应用（10 分）/ Bonus: Inverse Functions (10 points)

已知实数 a, b 分别满足

$$3^a = 5 - a, \qquad \log_3 b = 5 - b.$$

(1) 已知

$$f(x) = 3^x.$$

令 $y = 3^x$，交换 x, y，得

$$x = 3^y.$$

两边取以 3 为底的对数：

$$y = \log_3 x.$$

因此反函数为

$$\boxed{f^{-1}(x) = \log_3 x}.$$

(2) 直线

$$y = 5 - x$$

经过 $(0, 5)$ 和 $(5, 0)$。连接这两点即可得到所需直线。

(3) 由

$$3^a = 5 - a$$

可知点

$$A(a, 3^a)$$

同时位于 $y = 3^x$ 和 $y = 5 - x$ 上。

同理，由

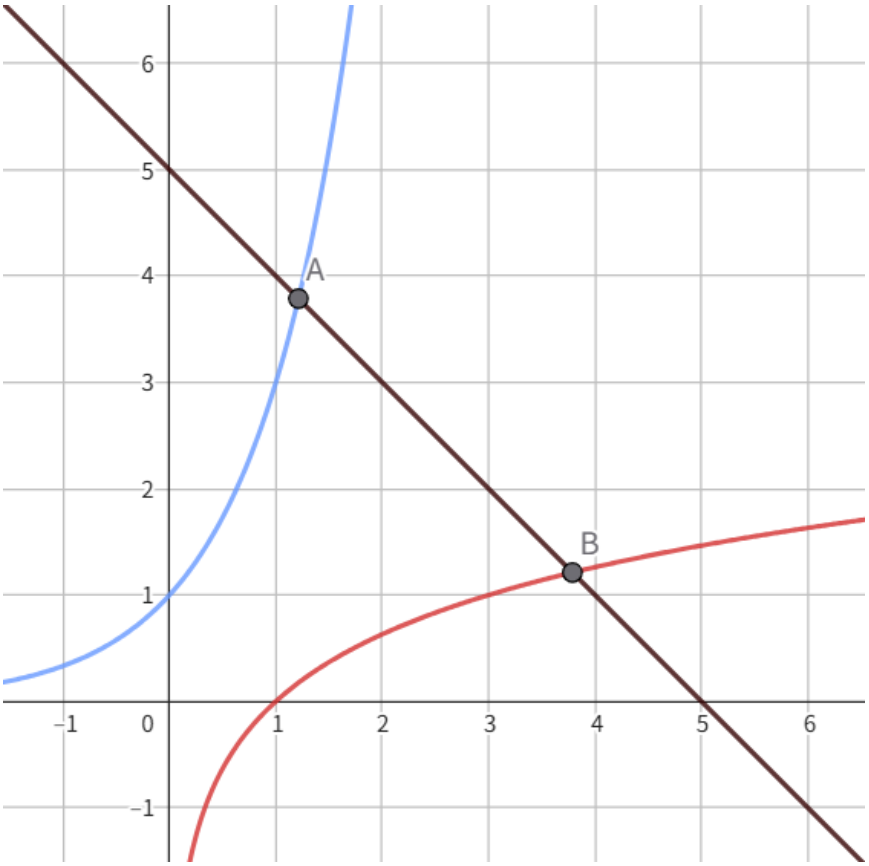
$$\log_3 b = 5 - b$$

可知点

$$B(b, \log_3 b)$$

同时位于 $y = \log_3 x$ 和 $y = 5 - x$ 上。

第 (2)、(3) 问的作图答案如下：



(4) 因为 $y=3^x$ 与 $y=\log_3 x$ 互为反函数，所以它们的图像关于直线 $y=x$ 对称。

另一方面，直线

$$y=5-x$$

也关于 $y=x$ 对称，因为交换 x,y 后，方程仍然是

$$x=5-y,$$

即 $y=5-x$。

因此，点 A 与点 B 关于 $y=x$ 对称，它们的横、纵坐标互换：

$$B=(3^a,a).$$

由于

$$B=(b,\log_3 b),$$

所以

$$b=3^a,\qquad \log_3 b=a.$$

再由已知条件

$$3^a=5-a,$$

得到

$$b=5-a.$$

因此

$$\boxed{a+b=5}.$$