2025.9.15. 序列极限.

1. 关于极限定义的思考.

① 定义 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. 以下等价.

(i) $\forall \varepsilon > 0. \exists N \in \mathbb{N}^+$ s.t. $\forall n \geq N$, $|a_n - a| < \varepsilon$

(ii) $\forall m \in \mathbb{N}^+ \exists N \in \mathbb{N}^+$ s.t. $\forall n > N$. 有 $|a_n - a| < \frac{1}{m}$

(iii) $\forall \varepsilon > 0$. $\exists N \in \mathbb{N}^+$ s.t. $\forall n > N$. $|a_n - a| < K\varepsilon$. K 与 ε, n 无关.

② 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. 是否有 $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$?

③ 若 $\{a_n\} \subseteq \mathbb{Z}$. 但有极限, 描述 $\{a_n\}$

④ 收敛序列单调吗? 无穷小量单调吗?

⑤ 无穷大序列单调吗? 无零序列是无穷大量吗?

⑥ $\exists N \in \mathbb{N}^+$. $\forall \varepsilon > 0$ s.t. $\forall n \geq N$ 有 $|a_n - a| < \varepsilon$.

$\{a_n\}$ 是什么样的?

⑦ $\{a_n\}$ 收敛, $\{b_n\}$ 发散. 则 $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n b_n\}$ 如何?

$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 都发散. 又如何?

2. 用 Bernoulli 不等式处理指数

① $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

证明: 令 $h = \sqrt[n]{n} - 1$. 则 $n = (1+h)^n \geq C_n^2 h^2$. $\Rightarrow h^2 \leq \frac{2}{n-1}$.

则 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n} - 1) = \lim_{n\to\infty} h$ $0 \leq h \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$ 知极限为 0 □

② $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt[n]{n} - 1) =$

Rmk. 3 还可以换更大的数

证明: 令 $h = \sqrt[n]{n} - 1$. $n = (1+h)^n \geq C_n^3 h^3 \Rightarrow \frac{n}{6} h^3 \leq \frac{6}{(n-1)(n-2)}$

$\Rightarrow \sqrt{n} h \leq \sqrt[3]{\frac{6}{(n-1)(n-2)}} \cdot \sqrt{n} \sim n^{-\frac{1}{6}} \to 0$. □

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

③ $\lim_{n\to\infty} n^2 q^n = 0$. $(0<q<1)$.

解：令 $k=\frac{1}{q}$. $k>1$. 则 $k^n = (1+(k-1))^n \geq C_n^3 (k-1)^3$

$0<n^2q^n = \frac{n^2}{k^n} \leq \frac{6n^2}{n(n-1)(n-2)(k-1)^3} \sim Cn^{-1} \to 0$ ✓.

3. 分子有理化技巧.

① $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+1}-n)$.

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} = 0$.

② $\lim_{n\to\infty} \sin\sqrt{n^2+1}\pi$

$= \lim_{n\to\infty} (\sin(\sqrt{n^2+1}-n)\pi)\cdot(-1)^n$

$= \lim_{n\to\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right) = 0$.

③ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})$

$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n}\frac{(n+1)-n}{(n+1)^{\frac{2}{3}}+n^{\frac{2}{3}}+(n+1)^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}} = 0$.

④ $\lim_{n\to\infty} \sin\sqrt{n^2+n}\pi$

$= \lim_{n\to\infty} \sin\frac{2n}{\sqrt{n^2+n}+n}$

⑤ $\lim_{n\to\infty} \sin(\sqrt{4n^2+n}\pi)$

$= \lim_{n\to\infty} \sin(\sqrt{4n^2+n}-2n)\pi$

$= \lim_{n\to\infty} \sin\frac{n}{\sqrt{4n^2+n}+2n}\pi = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. 数列问题.

① $\lim_{n\to\infty} \sqrt{2\sqrt{\cdots\sqrt{2}}}$ → n层.

定义 $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$，$a_1 = \sqrt{2}$. 容易归纳证明：$2 > a_n$

$a_{n+1} > a_n$. $\forall n \in \mathbb{N}^+$.

故 a_n 单调有上界 → 数列型问题通法

Step1. 单调有界 ⇒ 有极限

故设 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.

Step 2. 递推式上取极限

在 $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ 两端取极限. 知 $A = \sqrt{2A} \Rightarrow A = 2$

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

② $x_0=1$, $x_{n+1}=\sin x_n$.

那么 $0<x_{n+1}<x_n$ $\Rightarrow$ 设 $A=\lim_{n\to\infty} x_n$.

有 $A=\sin A$ $\Rightarrow A=0$.

③ $x_0=1$, $x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n}$.

那么，易证 $\frac{\sqrt5-1}{2}<x_{n+1}<x_n$. 设 $A=\lim_{n\to\infty} x_n$

$A=\frac{1}{1+A}$ $\Rightarrow A=\frac{-1\pm\sqrt5}{2}$.

又 $x_n>\frac{-1+\sqrt5}{2}$ 故 $\lim_{n\to\infty} x_n=\frac{\sqrt5-1}{2}$.

5. 向两侧放缩（n项求和）. 向 min，max 放缩，然后夹逼.

① $a_k>0$. $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{m} a_k^n\right)^{\frac{1}{n}}=\max_k a_k$.

证明：$\max_k a_k\le\left(\sum_{k=1}^{m} a_k^n\right)^{\frac{1}{n}}\le\sqrt[n]{m}\cdot\max_k a_k$.

又 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}=1$. 由夹逼定理即证.

~~变式 a_k $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{m} a_k^{\frac{1}{n}}\right)^n=\max_k a_k$~~

② $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

$\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}<$ $<\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\to 1$

$\to 1$

极限为 1.

③ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right)$.

$\frac{1}{n}<$ $<\frac{n}{(n+1)^2}$

$\to 0$ $\to 0$

极限为 0.

Rmk. 裂项也可以

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

6. 幂指型. $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$ → 凑成 e 的样子❀.

① $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^n$ ② $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}$ ③ $\lim_{n\to\infty}(\frac{n-2}{n-1})^{2n+1}$

① 当 $n > N$ 时, $0<(1+\frac{1}{n^2})^n = \left((1+\frac{1}{n^2})^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} \le \left((1+n^{\frac{1}{2}})^{n^2}\right)^{\frac{1}{N}}$.

令 $n\to\infty$. 即 $0 \le \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^n \le e^{\frac{1}{N}}$ $\forall N\in\mathbb{N}^+$.

故再令 $N\to\infty$. 即 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^n = 0$.

② 同理: $\forall N\in\mathbb{N}^+$. 有 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2} \ge e^N$

令 $N\to\infty$. 即 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2} = +\infty$.

③ $\lim_{n\to\infty}(\frac{n-2}{n-1})^{2n+1}$

$= \lim_{n\to\infty}\left[(1-\frac{1}{n-1})^{n-1}\right]^{\frac{2n+1}{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\left[(1-\frac{1}{n-1})^{n-1}\right]^2 \cdot \lim_{n\to\infty}\left[(1-\frac{1}{n-1})^{n-1}\right]^{\frac{3}{n-1}}$

$= e^{-2}\cdot\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n-1})^3 = e^{-2}$.

7. 真题 (简单夹逼定理).

① $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+\cos n}$. $\left(\underset{\to 1}{\sqrt[n]{1}} \le \sqrt[n]{2+\cos n} \le \underset{\to 1}{\sqrt[n]{3}}\right)$

$=1$

② $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2024+\sin e^n}$ $\left(\underset{\to 1}{\sqrt[n]{2023}} \le \sqrt[n]{2024+\sin e^n} \le \underset{\to 1}{\sqrt[n]{2025}}\right)$.

$=1$

8.* Cauchy 命题.

若 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. 则 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = A$.

证明: $\forall \varepsilon>0$. $\exists N_1\in\mathbb{N}^+$ s.t. $\forall n>N_1$, $|a_n|<\varepsilon$.

不妨设 $A=0$ 则 $\left|\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right| \le \left|\frac{a_1+\cdots+a_N}{n}\right| + \sum_{k=N+1}^{n}\frac{|a_k|}{n} \le \left|\frac{a_1+\cdots+a_N}{n}\right| + \frac{n-N}{n}\varepsilon \le \left|\frac{a_1+\cdots+a_N}{n}\right| + \varepsilon$

又 $|a_1+\cdots+a_N|$ 是常数. 故 $\exists N_2$ s.t. $\forall n>N_2$. $\left|\frac{a_1+\cdots+a_N}{n}\right| < \varepsilon$

即. $\forall\varepsilon>0$. 取 $N=N_2$ 有 $\forall n>N_1$ $\left|\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right| < 2\varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n} = A$ □

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

变式. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=A \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=A$.

$(a_n>0)$

未消难，自己思考。

思考题. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e$. (Stirling).

证明: 令 $a_n=\frac{n^n}{n!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\cdot\frac{1}{n+1}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\longrightarrow e.$$

由 Cauchy's Proposition. 证毕. □.

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App